

W ramach realizowanego przez miesięcznik „Builder” programu „Wspieramy młodych inżynierów budownictwa” dajemy możliwość pierwszych publikacji naukowych młodym doktorantom.



Jędrzej Dobrzański
Wydział Budownictwa
Lądowego i Wodnego
Politechnika Wrocławska

Opiekun naukowy:
dr inż. Marek Kawa
Katedra Geotechniki,
Hydrotechniki, Budownictwa
Podziemnego i Wodnego
Politechnika Wrocławska

U powszechnienie się komputerów i pojawienie metod numerycznych spowodowało, że w modelach teoretycznych „racjonalne obliczeniowo” stało się jak najbardziej odwzorowanie parametrów wytrzymałościowych badanego ośrodka wraz z uwzględnieniem zmienności tych parametrów w przestrzeni 3D. W przypadku gruntów jest to na tyle istotne, że ośrodek ten jest silnie niejednorodny – badania *in situ* pokazują bowiem, że właściwości podłoża zmieniają się znacznie bardziej w kierunku pionowym, aniżeli poziomym, a więc można mówić o anizotropii materiału.

Metoda Elementów Skończonych

Początkowo jednak pomijano kwestię losowości parametrów gruntowych. Jedne z pierwszych użyć Metody Elementów Skończonych (MES) w geotechnice miały miejsce z końcem lat 60. ubiegłego wieku. W roku 2004 ukazała się praca [4], w której podjęto się przeanalizowania sporej liczby istniejących konstrukcji geotechnicznych, w których do obliczeń wykorzystano MES. Porównano wówczas wyniki obliczeń z rezultatami rzeczywistych badań *in situ*. Rezultatem było to, że opis stanu gruntu (stanu odkształcenia) wynikający z modeli MES często znacznie różnił się od rzeczywistego. Wg autorów opracowania rozbieżności te w dużej mierze mogły wynikać z założenia deterministycznego modelu matematycznego opisującego zachowanie się ośrodka gruntowego, czyli takiego, w którym nie uwzględniono losowego charakteru parametrów gruntowych.

Podstawy matematyczne

Istnieje wiele struktur matematycznych pozwalających na odwzorowanie natury zmien-

GRUNT JAKO OŚRODEK LOSOWY

Problem dotyczący zagadnienia interakcji pomiędzy gruntem a konstrukcją istnieje, odkąd tylko ludzie zaczęli wznosić pierwsze budowle. Od samego początku jest to trudne zagadnienie, które stało się przedmiotem wielu badań.

ności danego ośrodka. Te, które dają się zastosować w geotechnice, można podzielić na dwie grupy: modele o skończonej skali – są to takie, w których korelacja pomiędzy zmiennymi losowymi (opisującymi dany parametr gruntowy) maleje wraz ze wzrostem odległości między punktami rozpatrywanej przestrzeni (pola losowego), dla których te zmienne są mierzone – oraz modele fraktalne: to takie, które wykazują samopodobieństwo niezależnie od skali modelu i w których skala korelacji zmiennych jest zależna od skali modelu. Wielu badaczy uznało, że modele o skończonej skali są bardziej adekwatne w przypadku zmienności parametrów gruntu. Podczas korzystania z tych modeli niezbędne jest zaznajomienie się z pewnymi pojęciami z analizy stochastycznej. Do opisu rozpatrywanego obszaru gruntu wykorzystuje się stacjonarne pola losowe. Pole losowe jest uogólnieniem procesu stochastycznego, a więc jest rodziną zmiennych losowych $X_t(\omega) = X$, $t \in T = R^n$, gdzie najczęściej $n = 2, 3$ w geotechnice. O polu losowym mówi się, że jest (ściśle) stacjonarne, gdy gęstości f_x zmiennej losowej x dla każdego punktu t pola losowego są jednakowe. Oznacza to, że pole takie jest niewrażliwe na przesunięcia oraz że wartość średnia i wariancja tego pola są wartościami stałymi.

Najbardziej rozpowszechnionym polem losowym w zastosowaniach geotechnicznych jest pole gaussowskie, co znaczy, że zmienne losowe opisujące parametry gruntowe mają rozkład normalny. Należy zwrócić uwagę na to, że grunt jako materiał charakteryzuje się tym, iż jego parametry w pewnym swoim otoczeniu są skorelowane. Innymi słowy – zmienne losowe opisujące te parametry nie są zmiennymi losowymi niezależnymi. Za-

leżność tę opisuje funkcja korelacji ρ_x , która dla stacjonarnego pola losowego przedstawia się wzorem:

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2} \quad (1)$$

gdzie:

τ – wektor separacyjny (przesunięcie) między punktami obszaru T , dla których mierzony jest parametr gruntowy opisany zmienną losową X ,

$C_x(\tau)$ – funkcja kowariancji zmiennych losowych X_{t_1}, X_{t_2} , przy czym $\tau = t_2 - t_1$,

σ_x^2 – wariancja pola losowego X_t .

Jeśli funkcja korelacji zależy jedynie od długości wektora separacyjnego, tzn. od $|\tau|$ (nieistotny jest kierunek), to o takim polu losowym mówi się, że jest izotropowe.

Wygodnym w użyciu parametrem opisującym zmienność pola losowego jest skala fluktuacji (nazywana również promieniem korelacji), w literaturze oznaczana θ . Najczęściej jest ona interpretowana jako odległość między punktami pola losowego, poza którą korelacja ρ_x jest już pomijalnie mała. Odległość ta w przybliżeniu jest odległością pomiędzy sąsiednimi „pikami” na trajektorii pola losowego, co dla procesu stochastycznego pokazano na rys. 1. [1]. Im mniejsza jest skala fluktuacji, tym większą zmiennością charakteryzuje się pole losowe.

Wartość skali fluktuacji równa jest podwójnemu polu pod wykresem funkcji korelacji, a więc obliczana jest ze wzoru:

$$\theta = 2 \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau \quad (2)$$

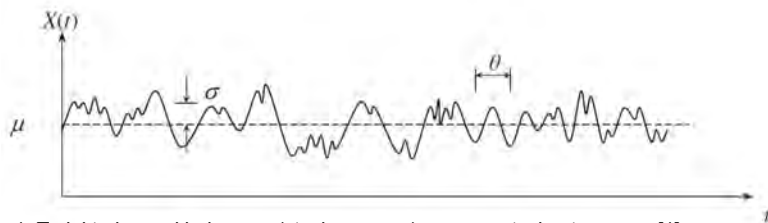
O wyznaczeniu skali fluktuacji na podstawie rzeczywistych danych z badań można przeczytać w literaturze, np. [2], [3].

Jak już wspomniano, grunt jest ośrodkiem charakteryzującym się dużo większą zmiennością w kierunku pionowym niż poziomym. Dla kierunków poziomych skala fluktuacji parametrów gruntowych osiąga wartości z przedziału $(10 \div 40)$ m, zaś dla kierunku pionowego $-(0,5 \div 3)$ m, w związku z tym rozróżnia się pionową skalę fluktuacji θ_v i poziomą θ_h oraz wprowadza się miarę anizotropii ξ opisaną wzorem:

$$\xi = \frac{\theta_h}{\theta_v} \quad (3)$$

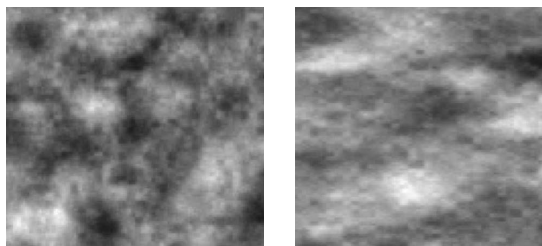
Metody numeryczne

Na przestrzeni lat z losowością parametrów gruntowych w obliczeniach inżynierskich próbowano radzić sobie w różnoraki sposób. Spośród metod numerycznych wyróżnić można 2 następujące podejścia: Random Finite Element Method (RFEM) i Stochastic Finite Element Method (SFEM). W dużym uproszczeniu Stochastyczna Metoda Elementów Skończonych (SFEM) polega na tym, że wyrazy macierzy sztywności zastępowane są wyrazami zawierającymi już w sobie niepewność związaną z losowością danego parametru. W rezultacie obliczeń otrzymuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa odnoszącą się do rozpatrywanej wielkości wynikowej.



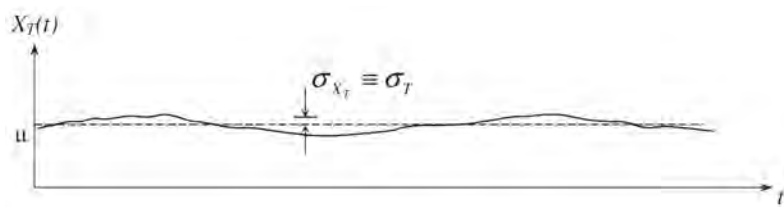
Rys. 1. Trajektoria przykładowego (stacjonarnego) procesu stochastycznego [1]

Fig. 1. Path of example (stationary) stochastic process [1]



Rys. 2. Przykładowa realizacja izotropowego i anizotropowego pola losowego przy użyciu metody LAS [5]

Fig. 2. Example of realization of isotropic and anisotropic random field with LAS method [5]

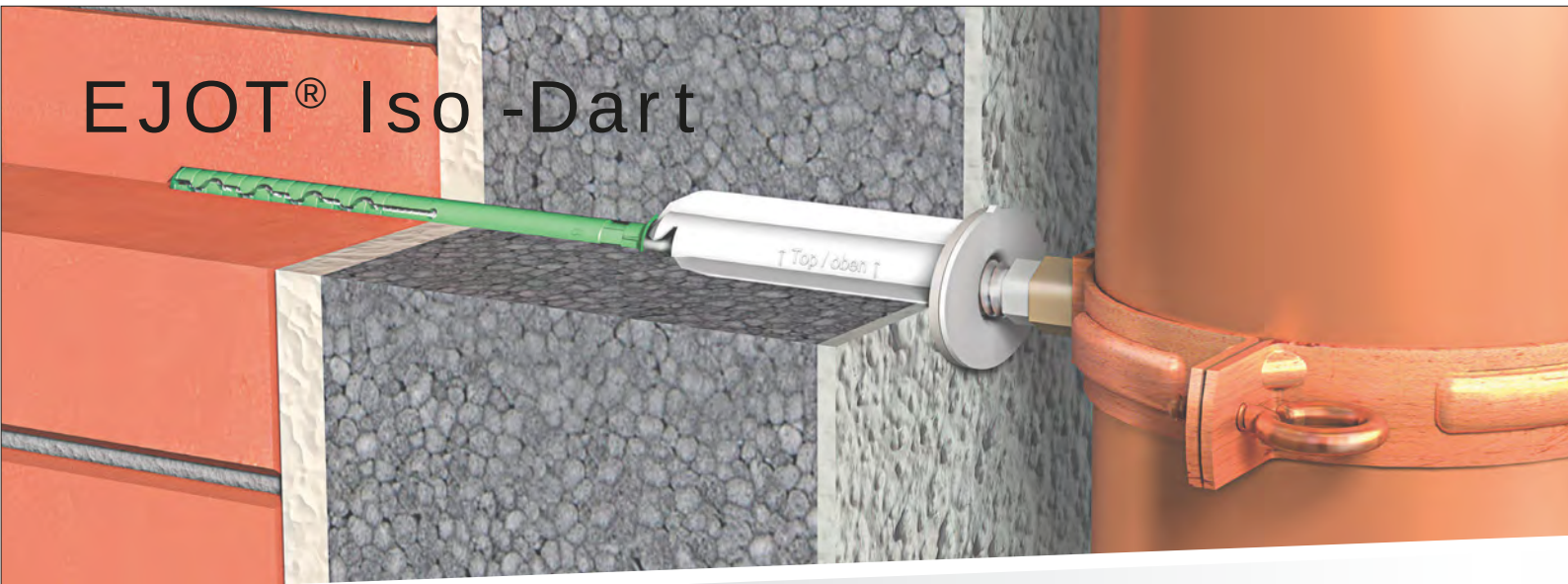


Rys. 3. Trajektoria procesu stochastycznego $X_T(t)$ [1]

Fig. 3. Path of stochastic process $X_T(t)$ [1]

REKLAMA

EJOT® Iso -Dart



CIEPŁY MONTAŻ ELEMENTÓW O WADZE DO 15 KG NA OCIEPLONEJ ELEWACJI

- ▶ bezpośredni i prosty montaż elementów typu: szyby, tablice reklamowe, oświetlenie zewnętrzne, okiennice, skrzynki pocztowe, anteny satelitarne itp.
- ▶ eliminacja mostków termicznych w miejscu mocowania
- ▶ uniwersalne mocowanie do wszystkich typów podłoży i rodzajów izolacji
- ▶ całkowite zabezpieczenie przed wnikaniem wody w strukturę ocieplenia
- ▶ montaż w tulei za pomocą śrub o średnicy 9 mm z gwintem typu A, śrub metrycznych o średnicy 10 mm i za pomocą redukcji, która daje możliwość stosowania śrub o mniejszych średnicach gwintu

Wadą tej metody jest jej czasochłonność, rosnąca szczególnie przy zagadnieniach silnie nieliniowych. Inną metodą wykorzystującą MES, a pozwalającą oszacować prawdopodobieństwo danego zdarzenia, jest Losowa Metoda Elementów Skończonych (RFEM). W przypadku tej metody próba podjęcia problemu losowości polega na tym, że dane zagadnienie inżynierskie (np. posadowienie bezpośrednie na podłożu gruntowym o losowych parametrach) rozwiązywane jest wielokrotnie (liczba rozwiązań liczona jest w tysiącach, a nawet dziesiątkach lub setkach tysięcy) – za każdym razem jednak z innej zdefiniowanym polem parametrów. W efekcie otrzymuje się bogaty zbiór wyników, na podstawie którego sporządza się histogram. Do tego histogramu dopasowywana jest krzywa, która może posłużyć za pewne przybliżenie gęstości badanej zmiennej losowej (może być to nośność posadowienia). Jeśli krzywą tę oznaczyć przez $f_X(x)$, to w łatwy sposób można obliczyć prawdopodobieństwo rozpatrywanego zdarzenia A (np. wystąpienie nośności niższej niż q_{lim}), korzystając ze wzoru:

$$P(A) = P(Q < q_{lim}) = F_X(q_{lim}) = \int_{-\infty}^{q_{lim}} f_X(t) dt \quad (4)$$

gdzie:

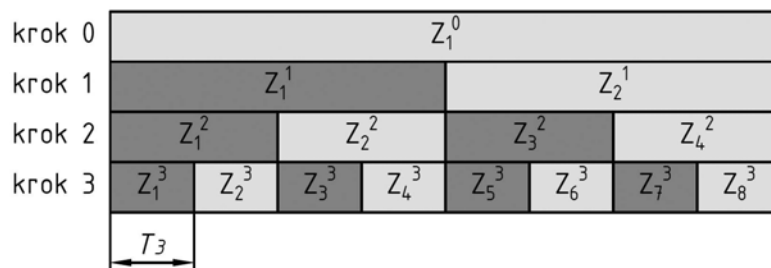
Q – nośność posadowienia (zmienna losowa),
 $F_X(t)$ – dystrybucja rozkładu f_X

Im więcej realizacji danego zagadnienia obliczeniowego zostanie wykonanych, tym dokładniej będzie można dopasować krzywą (w obliczu większej liczby danych), a zatem też dokładniej oszacować prawdopodobieństwo rozpatrywanego zdarzenia. Przewagą RFEM nad SFEM jest niewątpliwie to, że może zostać zastosowana w niemal każdym już istniejącym oprogramowaniu do MES. Posiada jednak też wadę – RFEM wymaga sporych mocy obliczeniowych. Jej prostota sprawia jednak, że obecnie jest najchętniej wykorzystywana.

Generatory pól losowych

By móc zacząć obliczenia przy użyciu RFEM, potrzebny jest jeszcze program, który będzie generował pola losowe opisujące dany parametr gruntowy. Wraz z rozwojem metod numerycznych powstało wiele algorytmów, oto niektóre z nich: Moving Average (MA), Direct Fourier Transform (DFT), Fast Fourier Transform (FFT), Turning Bands (TB), Generalised Stochastic Subdivision (GSS), Local Average Subdivision (LAS). Przykładowe realizacje pól losowych zostały przedstawione na rys. 2.

Obecnie przedmiotem zainteresowań wielu naukowców jest ostatnia z wymienionych metod – LAS, w Polsce nazywana metodą dzielenia lokalnych średnich. Jest wydajna i łatwa w użyciu, a jedną z większych za-



Rys. 4. Schemat algorytmu LAS

Fig. 4. LAS algorithm scheme

let jest to, że prowadzi do dyskretnego pola losowego, generując jego lokalne uśrednienia, co powoduje, że metoda ta w zasadzie jest wręcz dedykowana w modelowaniu MES [5]. Algorytm po raz pierwszy został zaprezentowany w pracach [6] i [7]. Opis matematyczny w przypadku 2D i 3D jest dość skomplikowany, choć sama idea jest prosta i zostanie przedstawiona dla przypadku 1D. W metodzie LAS zakłada się, że pole losowe $X(t)$ (opisujące np. właściwość gruntu) przybliżone będzie nowym polem $X_\tau(t)$, powstającym z pola $X(t)$ poprzez lokalne uśrednienie w każdym punkcie pola t , jak we wzorze (5).

$$X_\tau(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(u) du \quad (5)$$

Nowe pole losowe $X_\tau(t)$ w pewnym sensie „wygładza” wyjściowe pole losowe $X(t)$, patrz: rys. 1. i 3. Przybliżenie to w oczywisty sposób zależy od parametru T będącego obszarem, w jakim dokonuje się uśrednienie; w przypadkach szczególnych:

gdy $T \rightarrow \infty$, to $X_\tau(t) \rightarrow EX(t) = \mu$ i $\sigma_\tau = 0$,

gdy $T \rightarrow 0$, to $X_\tau(t) \rightarrow X(t)$ i $\sigma_\tau = \sigma$,

Niezależnie jednak od wartości T zawsze spełnione jest $\mu_\tau = \mu$.

Wariancja σ_τ^2 nowego pola losowego obliczana jest ze wzoru:

$$\sigma_\tau^2 = \gamma(T) \sigma^2 \quad (6)$$

gdzie $\gamma(T)$ nazywana jest funkcją wariancji lub funkcją redukcji wariancji. Można ją obliczyć ze wzoru:

$$\gamma(T) \cong \begin{cases} \frac{\theta}{T}, & T > \theta \\ 1, & T \leq \theta \end{cases} \quad (5)$$

z którego wynika, że pole losowe $X_\tau(t)$ będzie dobrym przybliżeniem pola $X(t)$ wtedy, gdy $T \leq \theta$.

Algorytm generowania pola losowego metodą LAS działa w sposób rekurencyjny. Polega na tym, że komórka (reprezentująca lokalne uśrednienie pola losowego $X(t)$) jest w każdym kolejnym kroku algorytmu dzielona na mniejsze podkomórki dopóty, dopóki pole losowe $X(t)$ w sposób dostateczny będzie reprezentowane przez serię lokalnych uśrednień, czyli wtedy, gdy rozmiar komórki

$T_i \leq \theta$ (zgodnie ze wzorem (7)). Ideę tę schematycznie przedstawia rys. 4.

Podsumowanie

W jakich przypadkach ma sens stosowanie tak dokładnej i wymagającej analizy? Z całą pewnością w przypadku domków jednorodzinnych byłby to przerost formy nad treścią. Powstają jednak obiekty, w których konsekwencje zniszczenia, zarówno moralne, jak i finansowe, są ogromne i w ich przypadku tak skomplikowane obliczenia stają się uzasadnione. Ponadto w przypadku obiektów przemysłowych, takich jak np. platformy wiertnicze, obliczenia inżynierskie pozwalające oszacować ryzyko zniszczenia stanowią niezbędną podstawę w kwestiach ubezpieczeniowych obiektu. ■

Bibliografia

- [1] Spencer W. A., Parallel stochastic and finite element modelling of clay slope stability in 3D. PhD Thesis. The University of Manchester, 2007.
- [2] Pieczyńska-Kozłowska J.M., Comparison between two methods for estimating the vertical scale of fluctuation for modelling random geotechnical problems. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2015, Vol. 37, No. 4, s. 95-103.
- [3] DeGroot D. J., Baecher G.B., Estimating autocovariance of in-situ soil properties. *Journal of Geotechnical Engineering*. 1993, Vol. 119, No. 1, s. 147-166.
- [4] Mestat P., Bourgeois E., Riou Y., Numerical modelling of embankments and underground works. *Computers and Geotechnics*. 2004, Vol. 31, No. 3, s. 227-236.
- [5] Oficjalna strona Wojciecha Puły. <http://www.ib.pwr.wroc.pl/wpula/> (dostęp 20.02.2018 r.).
- [6] Fenton G. A., Vanmarcke E. H., Simulation of random fields via local average subdivision. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*. 1990, Vol. 116, No. 8, s. 1733-1749.
- [7] Fenton G. A., Simulation and analysis of random fields. PhD Thesis. Princeton University, 1990.

ABSTRACT: NUMERICAL ANALYSIS OF ANISOTROPIC MEDIA WITH RANDOM PROPERTIES

The purpose of this review paper was to take up the subject of using numerical methods in calculations of highly heterogeneous media, such as soil. The article deals mainly with the issue of stochastic nature and variability of soil parameters and the ways of describing it with mathematical tools. The two main computational approaches, Random Finite Element Method (RFEM) and Stochastic Finite Element Method (SFEM), have been presented in a simplified manner. In addition, the existing methods for generating random fields have been listed and one of them – Local Average Subdivision (LAS) – has been briefly described.

Key words: FEM, RFEM, geotechnics, stochastics, reliability